# EXEMPLE

- Calculons

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz$$

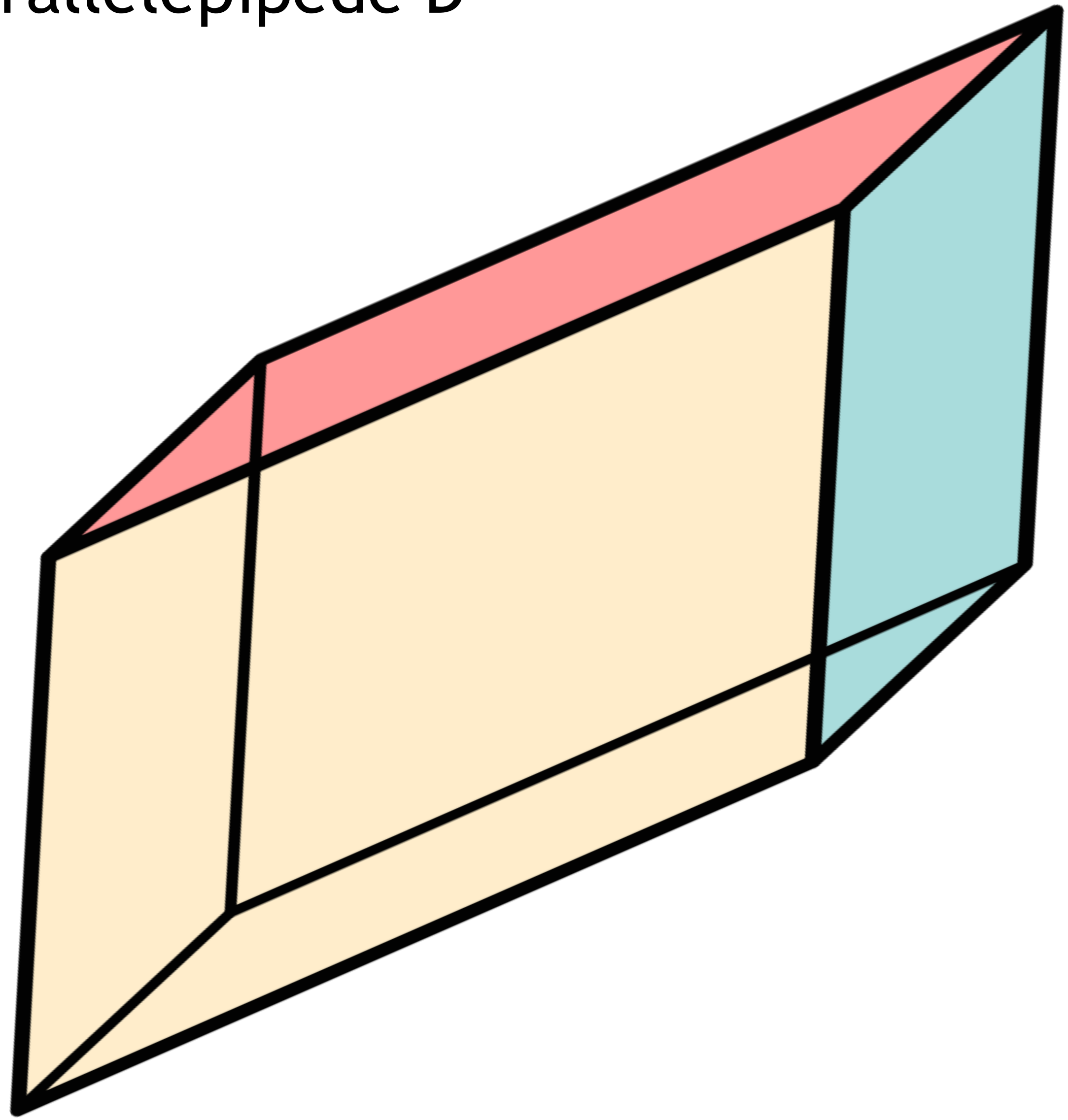
- Avec

$$f(x,y,z) = x + z$$

- Et D est le parallélépipède défini par:

$$D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} 1 \leq x + 2z \leq 2 \\ 0 \leq 2x + y \leq 1 \\ -1 \leq x + y - z \leq 2 \end{cases} \right\}$$

- Un parallélépipède D

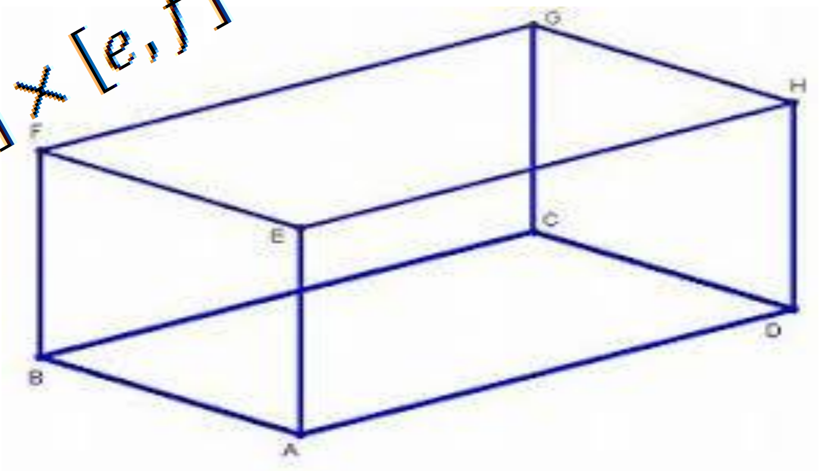


- Effectuons un changement de variable convenable

Pour avoir

- Un parallélépipède droit $\Delta$

$\Delta = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$



- Posons

$$\begin{cases} u = x + 2z \\ v = 2x + y \\ w = x + y - z \end{cases}$$

- Par suite

$$\begin{cases} x = -u + 2v - 2w \\ y = 2u - 3v + 4w \\ z = u - v + w \end{cases}$$

- Considérons la fonction

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \ \text{définie par: } \varphi(u,v,w)$$

$$= (-u + 2v - 2w, 2u - 3v + 4w, u - v + w)$$

- Et

$$\Delta = \left\{ (u,v,w) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} 1 \le u \le 2 \\ 0 \le v \le 1 \\ -1 \le w \le 2 \end{cases} \right\}$$

- Il est clair que

$$\Delta = [1,2] \times [0,1] \times [-1,2]$$

- Et

$$\varphi(\Delta) = D$$

- La fonction $\varphi$ étant affine bijective de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ et $\Delta$ est une partie bornée de $\mathbb{R}^3$

- De plus, f est intégrable sur $\varphi(\Delta)$

- D'ou, $f \circ \varphi$ est intégrable sur $\Delta$

- D'après le théorème précédent, on trouve

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz$$

$$= \iiint_\Delta f \circ \varphi(u,v,w) * j_\varphi(u,v,w)dudvdw$$

- Par suite

$$\iiint_D (x+z)dxdydz = \iiint_\Delta (v-w) * j_\varphi(u,v,w)dudvdw$$

- Avec

$$j_\varphi(u,v,w) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

- D'ou, $\iiint_D f(x,y,z)dxdydz$

$$= \left(\int_1^2 du\right) * \left(\int_0^1 vdv\right) * \left(\int_{-1}^2 dw\right) - \left(\int_1^2 du\right) * \left(\int_0^1 dv\right) * \left(\int_{-1}^2 wdw\right)$$

- Finalement,

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \frac{3}{2}[v^2]_0^1 - \frac{1}{2}[w^2]_{-1}^2 = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0$$